Краткие сообщения ОИЯИ №17-86 *JINR Rapid Communications No.17-86*
УДК 530.145

ОБ ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ АЛГЕБР E_6 И E_8

Нгуен Ван Хьеу, Нгуен Хунг Шон

Исключительные алгебры Ли E_6 и E_8 реализуются в терминах ковариантных операторов, преобразующихся как скаляры, спиноры, векторы и антисимметричный тензор по отношению к подалгебре SO(10) в цепочке редукций $E_8 \supset E_6 \otimes SU(3)$, $E_6 \supset SO(10) \otimes U(1)$. Приводятся в явном виде все коммутационные соотношения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

On a Realization of the Exceptional Algebras E_6 and E_8

Nguyen Van Hieu, Nguyen Hung Son

The exceptional Lie algebras E_6 and E_8 are realized in terms of the covariant operators transformed as scalars, spinors, vectors and an antisymmetric tensor under the subalgebra SO(10) in the reduction chain $E_8 \supset E_6 \otimes SU(3)$, $E_6 \supset SO(10) \otimes U(1)$. All commutation relations are given explicitly.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

В последнее время широко обсуждается возможность создания единой модели элементарных частиц и их взаимодействий, основанной на теории суперструны без аномалии в 10-мерном пространстве с калибровочной группой $E_8 \otimes E_8$ /1/. Такая теория допускает суперсимметричную спонтанную компактификацию на прямом произведении пространства Минковского и 6-мерного компактного многообразия с группой голономии SU(3) /2/. Из-за наличия большого числа генераторов /248 для алгебры E_8 / известный базис Картана оказывается неудобным для применения к изучению конкретных задач физики элементарных частиц. В настоящей работе получены коммутационные соотношения для исключительных алгебр E_6 и E_8 в SO(10)-ковариантном базисе, соответствующем цепочке $E_8 \supset E_6 \otimes SU(3)$, $E_6 \supset SO(10) \otimes U(1)$ и удобном для проведения размерной редукции, нарушающей симметрию от E_8 до E_6 /3/.

Подалгебра SO(10) обладает 45 генераторами $S_{ij} = -S_{ji}$, $i, j = 1,2,\ldots, 10$. Кроме них алгебра E_6 содержит SO(10) - синглет S и два SO(10) -спинора S_a и $S_{\dot a}$, преобразующихся по спинорным представлениям 16 и $\overline{16}$ соответственно.

Удобно также пользоваться 32-компонентным спинором S_A, являющимся прямой суммой этих двух неприводимых представлений:

$$S_A = \begin{cases} S_{\dot a}, & A = a \leq 16 \\ S_a, & A = a + 16 \geq 17 . \end{cases}$$

Единый 32-значный индекс заменим на набор пяти двухзначных индексов $A \to \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$, , $n_i = 1,2$. Тогда можно записать матрицы Дирака Γ_i в 10-мерном пространстве в компактном виде:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 , & \Gamma_6 &= \sigma_2 \otimes 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 , \\
\Gamma_2 &= \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 , & \Gamma_7 &= \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 , \\
\Gamma_3 &= \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 , & \Gamma_8 &= \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 , \\
\Gamma_4 &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 , & \Gamma_9 &= \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2 , \\
\Gamma_5 &= \sigma_2 \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 , & \Gamma_{10} &= \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1 .
\end{aligned}$$

В рассматриваемом SO(10)-ковариантном базисе алгебра E_6 реализуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
[S_{ij}, S_{k\ell}] &= i\{\delta_{ik} S_{j\ell} - \delta_{jk} S_{i\ell} - \delta_{i\ell} S_{jk} + \delta_{j\ell} S_{ik}\}, \\
[S_{ij}, S_A] &= -\frac{1}{2} (\Sigma_{ij})_{AB} S_B , \qquad [S_{ij}, S] = 0 , \\
[S_A, S_B] &= \frac{1}{4} (X_{ij})_{AB} S_{ij} + Y_{AB} S , \qquad\qquad /2/ \\
[S, S_A] &= \eta_A S_A , \quad \eta_{\dot a} = -\frac{3}{4} , \quad \eta_a = \frac{3}{4} ,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ij} &= \frac{1}{2i} [\Gamma_i , \Gamma_j], \qquad X_{ij} = \Sigma_{ij} C Y , \qquad\qquad /3/ \\
Y &= -i\sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 , \qquad C = -\sigma_3 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 .
\end{aligned}$$

Генераторы подалгебры SU(3) в цепочке $E_8 \supset E_6 \otimes SU(3)$ обозначим Q_m, $m = 1,2,\ldots,8$. Остальные генераторы алгебры E_8 образуют представления /27.3/ и /$\overline{27}.\overline{3}$/ подалгебры $E_6 \otimes SU(3)$. Представление 27 алгебры E_6 разлагается на прямую сумму представлений 10, 16 и 1 подалгебры $SU(10)$. Поэтому мы имеем следующие генераторы алгебры E_8, преобразующиеся по представлениям /27.3/ и /$\overline{27}.\overline{3}$/ подалгебры $E_6 \otimes SU(3)$ соответственно: $T_{i\alpha}$, $T_{a\alpha}$, T_α и T^α_i, $T^\alpha_{\dot a}$, T^α, $i = 1,2,\ldots,10$, $a = 1,2,\ldots,16$, $\alpha = 1,2,3$.

Коммутационные соотношения между ними и генераторами подалгебры E_8 определяют также фундаментальное представление 27 и сопряженное ему представление $\overline{27}$ этой подалгебры:

$$[S_{ij}, T_{k\alpha}] = i\{\delta_{ik} T_{j\alpha} - \delta_{jk} T_{i\alpha}\},$$

$$[S_{ij}, T_{a\alpha}] = -\frac{1}{2}(\Sigma_{ij})_{ab} T_{b\alpha}, \quad [S_{ij}, T_\alpha] = 0,$$

$$[S_a, T_{ia}] = 0, \quad [S_a, T_{b\alpha}] = -(\Gamma_i Y)_{ba} T_{i\alpha},$$

$$[S_a, T_\alpha] = T_{a\alpha}, \quad [S_{\dot a}, T_{i\alpha}] = \frac{1}{2}(\Gamma_i)_{\dot a b} T_{b\alpha}, \quad [S_{\dot a}, T_{b\alpha}] = 0, \qquad /4/$$

$$[S_{\dot a}, T_\alpha] = 0, \quad [S, T_{i\alpha}] = \frac{1}{2} T_{i\alpha}, \quad [S, T_{a\alpha}] = -\frac{1}{4} T_{a\alpha},$$

$$[S, T_\alpha] = -T_\alpha,$$

и аналогично для T^α_i, $T^\alpha_{\dot a}$, T^α.

Остальные коммутационные соотношения алгебры E_8 имеют вид

$$[T_{i\alpha}, T_{j\beta}] = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{ij} T^\gamma,$$

$$[T_{i\alpha}, T^\beta_j] = -\frac{i}{2}\delta^\beta_\alpha S_{ij} - \delta_{ij} Q^\beta_\alpha - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta^\beta_\alpha S, \qquad /5/$$

$$[T_{i\alpha}, T_{a\beta}] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{1}{2}(\Gamma_i)_{a\dot b} T^\gamma_{\dot b},$$

$$[T_{i\alpha}, T^\beta_{\dot a}] = -\frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha(\Gamma_i)_{\dot a b} S_b, \quad [T_{i\alpha}, T_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} T^\gamma_i, \quad [T_{i\alpha}, T^\beta] = 0,$$

$$[T_{a\alpha}, T_{b\beta}] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\Gamma_i Y)_{ab} T^\gamma_i,$$

$$[T_{a\alpha}, T^{\beta}_{\dot b}] = \frac{1}{4}(X_{ij})_{a\dot b}\, S_{ij}\, \delta^{\beta}_{\alpha} + 2Y_{a\dot b}\, Q^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{3} Y_{a\dot b}\, \delta^{\beta}_{\alpha} S,$$

$$[T_{a\alpha}, T_{\beta}] = 0, \quad [T_{a\alpha}, T^{\beta}] = \delta^{\beta}_{\alpha} S_a, \quad [T_{\alpha}, T_{\beta}] = 0,$$

$$[T_{\alpha}, T^{\beta}] = \frac{4}{3}\delta^{\beta}_{\alpha} S - 2Q^{\beta}_{\alpha}, \quad Q^{\beta}_{\alpha} = Q_m(\lambda_m)^{\beta}_{\alpha},$$

где λ_m - матрицы Гелл-Манна группы SU(3).

Задание алгебры E_8 в виде SO(10) -ковариантных соотношений /2/-/5/ оказывается удобным методом при изучении E_6 -симметрии, полученной в результате спонтанного нарушения E_8-симметрии.

Литература

1. Green M.B., Schwarz J.H. Phys.Lett., 1984, 149B, p.117.
2. Candelas P. et al. Nucl.Phys., 1985, B258, p.46.
3. Witten E. Phys.Lett., 1985, 155B, p.151.

Рукопись поступила 28 мая 1986 года.